



<p>COURS DE MATHÉMATIQUES Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom</p>

Les intégrales

Valeur moyenne

Ce cours porte exclusivement sur la valeur moyenne des fonctions réelles admettant une intégrale sur un intervalle.

1 L'idée générale

L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et deux bornes (deux abscisses).

Si par exemple calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante est simple, calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse variable s'avère moins évident et nécessite de recourir au calcul intégral.



2 La théorie

2.1 La valeur moyenne

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ non nul ($a \neq b$).

La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le réel ξ , défini par

$$\xi = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

2.2 L'inégalité de la moyenne

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ non nul ($a \neq b$).

Soient m et M deux réels tels que $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$.

L'inégalité de la moyenne revient à écrire

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

3 Attention !

Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il faut absolument :

- déterminer son ensemble de définition ;
- vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle ;
- vérifier que les bornes de l'intégrale appartiennent à cet intervalle.



4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 9x^2 + 15$ entre $x = 2$ et $x = 5$.

Soit μ cette valeur moyenne.

Avant de calculer la valeur moyenne, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f . f est définie et continue sur \mathbb{R} (voir les cours “**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**” et “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 2$ et $x = 5$ appartiennent à \mathbb{R} , donc l'intégrale de f entre $x = 2$ et $x = 5$ existe.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{5-2} \int_2^5 f(t) dt \\ \mu &= \frac{1}{3} \int_2^5 (9t^2 + 15) dt \\ \mu &= \frac{1}{3} \left[\frac{9t^3}{3} + 15t \right]_2^5 \\ \mu &= [t^3 + 5t]_2^5 \\ \mu &= 5^3 + 5 \times 5 - 2^3 - 5 \times 2 \\ \mu &= 125 + 25 - 8 - 10 \\ \mu &= 132\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la fonction f entre $x = 2$ et $x = 5$ est $\mu = 132$.



4.2 Exercice 2

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$ entre $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Soit μ cette valeur moyenne.

Avant de calculer la valeur moyenne, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f . f est définie et continue sur \mathbb{R} (voir les cours “**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**” et “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = 2\pi$ appartiennent à \mathbb{R} , donc l'intégrale de f entre $x = 0$ et $x = 2\pi$ existe.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ \mu &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(t) + \sin(t)] dt \\ \mu &= \frac{1}{2\pi} [\sin(t) - \cos(t)]_0^{2\pi} \\ \mu &= \frac{1}{2\pi} [0 - 1 - 0 - (-1)] \\ \mu &= 0\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la fonction f entre $x = 0$ et $x = 2\pi$ est $\mu = 0$.



4.3 Exercice 3

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ $1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$.

$\forall t \in]0; x]$, on peut écrire

$$1 \leq e^t \leq e^x$$

Or, sur \mathbb{R}_*^+ , la fonction $f : t \mapsto e^t$ est définie et continue (voir les cours “**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**” et “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des intégrales. L’inégalité de la moyenne peut donc être appliquée entre $t = 0$ et $t = x$.

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{x - 0} \int_0^x e^t dt \leq e^x \\ 1 &\leq \frac{1}{x} [e^t]_0^x \leq e^x \\ 1 &\leq \frac{1}{x} (e^x - 1) \leq e^x \\ x &\leq e^x - 1 \leq xe^x \\ 1 + x &\leq e^x \leq 1 + xe^x \end{aligned}$$



4.4 Exercice 4

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

$\forall t \in]0; x]$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

Or, sur \mathbb{R}_*^+ , la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est définie et continue (voir les cours “**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**” et “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des intégrales. L’inégalité de la moyenne peut donc être appliquée entre $t = 0$ et $t = x$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\leq \frac{1}{x-0} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq 1 \\ \frac{1}{1+x} &\leq \frac{1}{x} [\ln(1+t)]_0^x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x} &\leq \frac{1}{x} [\ln(1+x) - \ln(1)] \leq 1 \\ \frac{1}{1+x} &\leq \frac{1}{x} \ln(1+x) \leq 1 \\ \frac{x}{1+x} &\leq \ln(1+x) \leq x \end{aligned}$$